ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Πέμπτη 18 Ιουνίου 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία σελίδα 16.

Α2 α΄) Λ β΄) Σ γ΄) Λ

Α3 α΄) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

β΄) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ με $x > 0$

γ΄) $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

Α4 Θεωρία σελίδα 28 – 29.

ΘΕΜΑ Β

Β1 Αφού το 40% των μαθητών δε διάβασαν κανένα βιβλίο έχουμε $f_1\% = 40\%$. Άρα:

$$\begin{array}{rcll} f_1\% & = & F_1\% & = 40\% \\ f_2\% & = & F_2\% - F_1\% & = 70\% - 40\% = 30\% \\ f_3\% & = & F_3\% - F_2\% & = 90\% - 70\% = 20\% \end{array}$$

<u>**2ος τρόπος**</u>: Είναι

$$f_3\% = 100\% - f_1\% - f_2\% - f_3\% - f_4\% = 100\% - 10\% - 30\% - 10\% = 20\%$$

Από την άλλη είναι

$$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} = 100 \Leftrightarrow 20 = \frac{10}{\nu} \cdot 100 \Leftrightarrow \nu = \frac{1000}{20} \Leftrightarrow \nu = 50$$

και

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad 40 = \frac{\nu_1}{50} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_1 = 20$$

$$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad 30 = \frac{\nu_2}{50} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_2 = 15$$

$$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \frac{\nu_4}{50} \cdot 100 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_4 = 5$$

ή

$$\nu_4 = 50 - \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 = 50 - 20 - 15 - 10 = 5$$

Οπότε,

$$\begin{array}{rcll} N_1 & = & \nu_1 & = 20 \\ N_2 & = & N_1 + \nu_2 & = 20 + 15 = 35 \\ N_3 & = & N_2 + \nu_3 & = 35 + 10 = 45 \\ N_4 & = & N_3 + \nu_4 & = 45 + 5 = 50 \end{array}$$

Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

x_1	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

B2 Το ποσοστό των μαθητών που είχε διαβάσει αντιστοιχεί στη σχετική συχνότητα $f_4\% = 10\%$.

B3 Τουλάχιστον ένα βιβλίο διάβασαν οι $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 10 + 5 = 30$ μαθητές.

B4 Το πολύ 2 βιβλία διάβασε το

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% = 40\% + 30\% + 20\% = 90\%$$

των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Είναι $f(-1) = -2$ οπότε:

$$\begin{aligned} f(-1) = -2 &\Leftrightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \lambda + 2 = -2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \end{aligned}$$

Γ2 Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Γ3 Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(0) = 2$	$\searrow$	$f(2) = -2$	$\nearrow$	

Από το πίνακα διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ ίσο με $f(0) = 2$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ ίσο με $f(2) = -2$.

Γ4 Για $\lambda = 3$ είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)} &= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3\left(x^2 - 2x + 1\right)}{6\left(x - 1\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{3\left(x - 1\right)^2}{6\left(x - 1\right)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 1}(x - 1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Για την $f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{2020}$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 20\left(x^2+4x+5\right)^{19}\left(x^2+4x+5\right)' \\
&= 20\left(x^2+4x+5\right)^{19}(2x+4) \\
&= 20\left(x^2+4x+5\right)^{19}\cdot 2\cdot(x+2) \\
&= 40\left(x^2+4x+5\right)^{19}(x+2)
\end{aligned}
$$

Δ2 Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = f'(-2) = 0$$

Δ3 Η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ άρα $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0=-2$ από το ερώτημα Δ2. Επιπλέον είναι

$$f(-2) = (4-8+5)^{20} = 1^{20} = 1$$

Άρα ζητείται η εφαπτομένη η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(-2,1)$. Έστω $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη. Εφόσον είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι $\alpha=0$ και εφόσον διέρχεται από το Β είναι

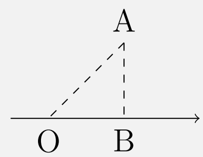
$$1 = 0\cdot(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y=1$.

Δ4 Έστω το σημείο $\mathrm{A}(x,1)$, $x>0$ επί της ευθείας $y=1$. Είναι:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AO} &= \sqrt{(x-0)^2+(1-0)^2} \\
&= \sqrt{x^2+1}
\end{aligned}
$$

2ος τρόπος: Αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο τρίγωνο AOB όπως αυτό απεικονίζεται στο σχήμα έχουμε:



τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{OB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AO} = \sqrt{x^2+1}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Οπότε $g'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.