ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*16 / 06 / 2021*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***Μαθηματικά ΟΠ***

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α.

Α1. Θεωρία σχολ. βιβλίου σελ 135.

Α2 Θεωρία σχολ βιβλίου σελ 51

Α3 Θεωρία σχολ βιβλίου σελ 23

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

$f(x+1)=(x+1)e^{-x}$ Για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B1) Θέτουμε $u=x+1$, άρα $x=u-1$

$f(u)=u e^{-(u-1)} = u e^{1-u}$, $u\in A$ επομένως

$f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

B2) $f'(x)=\left(xe^{1-x}\right)' = 1\cdot e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)' =$

$= e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)<0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$.

f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα f γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Η f εμφανίζει ολικό μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1e^{1-1}=1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\boxed{1}$	$\searrow$

$\boxed{B_3}$ $f''(x) = \left(e^{1-x} - xe^{1-x}\right)' = e^{1-x}(1-x)' - \left[x'e^{1-x} + xe^{1-x}(1-x)'\right]$

$= -e^{1-x} - \left(e^{1-x} - xe^{1-x}\right) =$

$= -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$

$f''(x) > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\iff} x-2>0 \iff x>2$

$f''(x) < 0 \overset{e^{1-x}>0}{\iff} x-2<0 \iff x<2$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άρα f κυρτή στο $[2,+\infty)$ κ' κοίλη στο $(-\infty,2]$

Η f εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_1=2$

το $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$ Άρα Σ.Κ το $(2, 2e^{-1})$

$f(x) = xe^{1-x}$ με $D_f = \mathbb{R}$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$

Επομένως η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e}{e^x} = +\infty.$

Επομένως δεν έχει πλάγια ή οριζόντια καθώς $x \to -\infty$

B4] $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ $f \uparrow$

$\Delta_2 = (1, +\infty)$ $f \downarrow$ · f συνεχής στο Δ

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1] \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e \cdot \frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

$$\left(\bullet \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad \bullet \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \right)$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) = (0, 1)$$

το όριο έχει δειχθεί σε προηγούμενο ερώτημα

Άρα $f(\Delta) = (-\infty, 1] \cup (0, 1) = (-\infty, 1]$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
f	$-\infty$ ↗	ΟΜ $f(1)=1$	↘ 0

Απο το σύνολο τιμών της f προκύπτει ότι

αν $\lambda \leq 0$ η (ε) $f(x)=\lambda$ έχει μια ρίζα

$0<\lambda<1$ η (ε) $f(x)=\lambda$ έχει δυο ρίζες

$\lambda=1$ η (ε) $f(x)=\lambda$ έχει μια ρίζα την $x=1$.

$\lambda>1$ η (ε) $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη

<u>β' τρόπος</u>

Για $\lambda \leq 0$ έχουμε μια ρίζα για την $f(x)=\lambda$

Για $0<\lambda<1$ " δυο ρίζες για την $f(x)=\lambda$

Για $\lambda=1$ " μια ρίζα για την $f(x)=\lambda$

Για $\lambda>1$ δεν έχουμε ρίζα για την $f(x)=\lambda$

Θέμα Γ

Γ1) $f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-x+1 & x\leq 0 \\ συνx & 0<x\leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$f(0)=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(συνx)=1$

- Η f συνεχής στο $x_0=0$
- Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική κ συνεχής στο $(0,\frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική Άρα συνεχής στο $(-\infty, 3\pi/2]$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(ax^2-3x-1)}{\cancel{x}}=-1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{συνx-1}{x}=0$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$\boxed{2}$ i) Η f συνεχής στο $[0, 3\pi/2]$

Η f παραγ. στο $(0, 3\pi/2)$

$$f(3\pi/2) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$f(0) = 1$$

Συνεπώς δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

ii) Αν $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ τότε $f'(x) = -\eta\mu x$

Έστω $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k\pi < \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < k < \frac{3}{2}$

$\to k = 1$

Για $k = 1$: $x = 1\cdot\pi = \pi$

Άρα υπάρχει μοναδικό $\exists = \pi \in (0, \frac{3\pi}{2})$ για το οποίο ισχύει $f'(\pi) = 0$.

Γ3) Έστω σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0<0$

τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

Για $x<0$ η $f'(x)=3ax^2-6x-1$

Άρα $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 3ax_0^2-6x_0-1=0$

$\Delta=(-6)^2-4\cdot(3\alpha)\cdot(-1)=36+12a$

Όμως $a<-3 \Leftrightarrow 12\alpha<-36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12a+36<0 \Leftrightarrow \Delta<0$

Άρα $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x<0$, άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Γ4) Για $x<0$: $f'(x)=3ax^2-6x-1<0$

διότι $\Delta<0$ κ $3a<0$

Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$: $f'(x)=-\eta\mu x$.

- Για $x\in(0,\pi)$ το $\eta\mu x>0 \Leftrightarrow f'(x)<0$
- Για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ το $\eta\mu x<0 \Leftrightarrow f'(x)>0$.

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$3ax^2-6x-1$		$-$					
$-\eta\mu x$				$-$	0	$+$	
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↘		↘		↗	
					T.E		T.M.

Η f συνεχής στο A_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha x^3) = +\infty \quad (\text{διότι } \alpha<0)$$

$$f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\,\pi = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Για το σύνολο τιμών της f.

$$f((-\infty,\pi]) \overset{\searrow}{=} \left[f(\pi), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$$

$$f\left(\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right) \overset{\nearrow}{=} \left(f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = (-1,0]$$

Άρα $f(A) = [-1,+\infty)$ συνεπώς

$f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in A_f$.